

Zweite Woche, 6. April, Copyright © 2009 by Gerhard Oberressl

0.1 Der Begriff des allgemeinen Vektorraumes

Wir wollen uns hier mit Bewegungen im Raum beschäftigen und mit anderen Phänomenen, zu deren Beschreibung dann eine Zahl nicht ausreicht, wenn es auch auf die Richtung ankommt, in der sie ablaufen oder wirken. Für die meisten Erscheinungen eignet sich als Bezugsrahmen am besten ein rechtwinkeliges Koordinatensystem, wie auf der nächsten Seite in Abb. 0.1 dargestellt. Um unser Interesse am dreidimensionalen Raum in einem größeren Zusammenhang zu sehen, wollen wir uns zuerst ansehen, wie ein allgemeiner Vektorraum definiert ist.

Wir tun dies nur, um darum zu wissen, wenn manchmal eine Andeutung darauf gemacht wird.

Wir wollen aber im Auge behalten, daß die Rechengesetze die durch die folgenden zehn Axiome gegeben sind, für unsere Vektoren genauso gelten. Im Zweifelsfall können wir immer auf sie zurückgreifen.

Definition

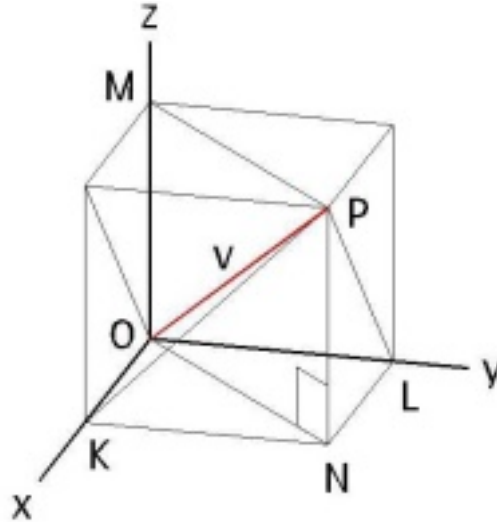
Sei \mathbf{V} eine nichtleere Menge beliebiger Objekte, auf der zwei Verknüpfungen definiert sind: 1.) Addition der Objekte und 2.) Multiplikation der Objekte mit Skalaren aus einem Körper \mathbf{K} . Bei Addition ist eine Vorschrift gemeint, die jedem Paar von Objekten \mathbf{u} und \mathbf{v} in \mathbf{V} , genau ein Objekt $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ in \mathbf{V} zuordnet, die Summe von \mathbf{u} und \mathbf{v} genannt; die Multiplikation assoziiert mit jedem Skalar a aus \mathbf{K} und jedem Objekt \mathbf{w} aus \mathbf{V} ein Objekt $a\mathbf{w}$ in \mathbf{V} .

Wenn die folgenden 10 Axiome (im Folgenden die VR-Axiome genannt) für alle \mathbf{u} , \mathbf{v} , \mathbf{w} in \mathbf{V} und alle Skalare a und b aus \mathbf{K} erfüllt sind, dann heißt \mathbf{V} Vektorraum über \mathbf{K} und wir nennen die Objekte in \mathbf{V} Vektoren. (In den folgenden VR-Axiomen und überhaupt für alle Zukunft, wollen wir mit Körper \mathbf{K} immer die Menge \mathbf{R} der reellen Zahlen meinen).

1. Sind \mathbf{u} und \mathbf{v} in \mathbf{V} , dann ist $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ in \mathbf{V}
2. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$
3. $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$
4. Es gibt ein Objekt $\mathbf{0}$ in \mathbf{V} , so daß $\mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$ für alle \mathbf{u} in \mathbf{V}
5. Für jedes \mathbf{u} in \mathbf{V} existiert ein $-\mathbf{u}$ in \mathbf{V} , so daß $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = (-\mathbf{u}) + \mathbf{u} = \mathbf{0}$
6. Ist a eine (reelle) Zahl und \mathbf{u} ein Objekt in \mathbf{V} , dann ist $a\mathbf{u}$ in \mathbf{V}
7. $a(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = a\mathbf{u} + a\mathbf{v}$
8. $(a + b)\mathbf{u} = a\mathbf{u} + b\mathbf{u}$
9. $a(b\mathbf{u}) = (ab)\mathbf{u}$
10. $0\mathbf{u} = \mathbf{0}$, $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$

0.2 Der Begriff des Vektors im Raum unserer Anschauung

Abbildung 0.1: Ein kartesisches Koordinatensystem



Wir wollen uns mit einem rechtwinkligen, kartesischen¹ Koordinatensystem vertraut machen und betrachten dazu einen Punkt P . Bezüglich diesem System hat der Punkt die Koordinaten x, y, z , die durch die Abstände OK, OL und OM gegeben sind. Schiebt man den Punkt um den Weg x senkrecht auf die yz -Ebene hin, dann kommt er in diese Ebene zu liegen und hat dann die x -Koordinate 0 . Schiebt man den Punkt noch einmal um den gleichen Weg in die selbe Richtung, dann hat er die x -Koordinate $-x$. Er ist dann das Spiegelbild seiner Ausgangslage, gespiegelt an der yz -Ebene.

Als nächstes wollen wir uns für die Entfernung des Punktes P vom Ursprung O des Koordinatensystems interessieren. Das Dreieck KNO hat bei K einen rechten Winkel, somit ergibt sich nach dem Satz des Pythagoras² die Diagonale ON : $ON = \sqrt{x^2 + y^2}$. Da wir beim Punkt N auch einen rechten Winkel entdecken, ergibt sich OP als $OP = \sqrt{ON^2 + z^2}$, also

$$OP = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (0.1)$$

Wir nennen (x, y, z) einen Vektor und schreiben gelegentlich auch $(x \ y \ z)$ oder $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, wenn es zum Rechnen günstiger ist. Wir stellen uns darunter den Punkt P oder die gerichtete Strecke $\overline{OP} = \mathbf{v}$ vor, je nachdem, wie es uns paßt. Unter $OP = \|\mathbf{v}\| = v$ verstehen wir die *Länge* von \mathbf{v} , auch der *Betrag* von \mathbf{v} oder die *Norm* von \mathbf{v} genannt. $\|\mathbf{v}\| = v$ ist ein Skalar.

¹nach René Descartes, lat. Cartesius

²570 - 500 v. Chr.

Wenn man Vektoren zeichnet, trägt man die Strecke entsprechend der Länge und Richtung auf und bringt am Ende einen Pfeil an, damit der Richtungssinn sichtbar wird. In Abb. 0.1 weiss man nicht, ob mit $\mathbf{v}(x, y, z)$ oder $(-x, -y, -z)$ gemeint ist, da ein Pfeil fehlt. Dem Einwand, \mathbf{v} würde im letzteren Fall vom Punkt O in die entgegengesetzte Richtung gehen, stimmen wir nur bedingt zu. Es ist richtig, daß ein *Ortsvektor* (auch *Radiusvektor*) immer im Punkt O , dem *Koordinatenursprung*, beginnt. Alle unendlich vielen Vektoren welche die gleiche Länge und Richtung haben, kann man sich aber überall im Raum denken. Sie sind zu ihrem Ortsvektor äquivalent. Man sagt, der Ortsvektor ist der Repräsentant der Äquivalenzklasse.

Die Gesamtheit aller Äquivalenzklassen bildet hier die Menge \mathbf{V} , von der in der Definition im vorigen Abschnitt 0.1 die Rede ist. In diesem Fall sprechen wir vom *dreidimensionalen Vektorraum* über \mathbf{R} (den reellen Zahlen). Er wird als \mathbf{R}^3 bezeichnet.

Damit haben wir uns einen Raum geschaffen, in dem wir nach Belieben Objekte addieren oder mit Skalaren multiplizieren können. Wir haben aber noch mehr! Die Unterräume \mathbf{R}^2 und \mathbf{R}^1 . Jede beliebige Ebene die den Punkt O enthält, ist ein zweidimensionaler Vektorraum. Jede Gerade durch den Nullpunkt ist ein eindimensionaler Vektorraum, ein Unterraum von \mathbf{R}^2 .

0.3 Rechnen mit Vektoren

Wenn man auf einem Blatt Papier arbeitet (sollte man immer bereit haben), kann man natürlich die Zeichen wählen wie man will. Die hier fett geschriebenen Symbole für Vektoren wie \mathbf{u} , \mathbf{v} , \mathbf{a} , etc. schreibt man dann, zur Unterscheidung von skalaren Größen oft \bar{u} , \bar{v} , \bar{a} , etc., je nach Geschmack.

Nun gehen wir ans Rechnen.

Beispiel (1) In Abbildung 0.1 sei $\mathbf{v} = (3, \sqrt{11}, 4)$. Nach Gleichung 0.1 ist seine Länge dann gegeben mit

$$v = OP = \sqrt{3^2 + 11 + 4^2} = 6$$

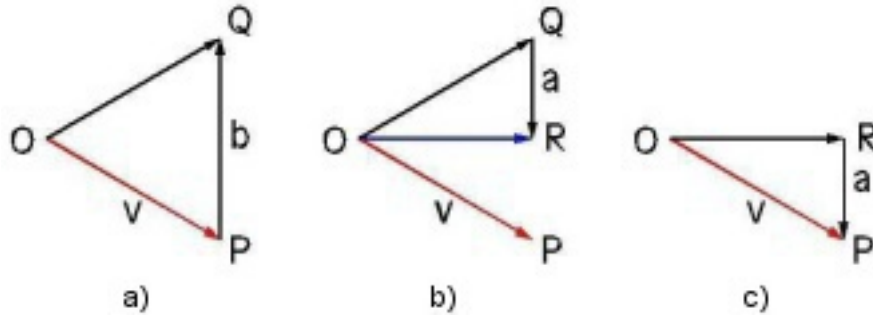
Betrachten wir nun die Ebene, die durch O , K und P aufgespannt wird, und sehen wir uns Abb. 0.2 an. Wir setzen $\mathbf{a} = \overline{OK} = (3, 0, 0)$ und $\mathbf{b} = -2\mathbf{a} = -2(3, 0, 0) = (-6, 0, 0)$.

0.3.1 Graphische Methode

Graphisch addiert man 2 Vektoren, indem man den Anfangspunkt des 2. Vektors an den Endpunkt des 1. Vektors ansetzt. Die Vektorsumme ist dann der Vektor vom Anfangspunkt des ersten zum Endpunkt des zweiten. (Siehe Abbildung 0.2)

In Abb. 0.2a addieren wir \mathbf{b} zu \mathbf{v} und erhalten \overline{OQ} . In Abb. 0.2b addieren wir \mathbf{a} zu \overline{OQ} und erhalten \overline{OR} . In Abb. 0.2c addieren wir \mathbf{a} zu \overline{OR} und erhalten wieder \overline{OP} .

Abbildung 0.2: Graphische Addition von Vektoren



0.3.2 Algebraische Methode

Algebraisch werden Vektoren addiert, indem man die entsprechenden Komponenten addiert. Vektoren werden mit einem Skalar multipliziert, indem man jede der drei Komponenten mit dem Skalar multipliziert. (Siehe dazu ebenfalls Abbildung 0.2)

- Fall a: $\mathbf{v} + \mathbf{b} = (3, \sqrt{11}, 4) + (-6, 0, 0) = (-3, \sqrt{11}, 4)$,
- Fall b: $\overline{OQ} + \mathbf{a} = (-3, \sqrt{11}, 4) + (3, 0, 0) = (0, \sqrt{11}, 4)$ und
- Fall c: $\overline{OR} + \mathbf{a} = (0, \sqrt{11}, 4) + (3, 0, 0) = (3, \sqrt{11}, 4)$.

0.3.3 Übungen

1. Man überlege sich, welche Objekte gemäß der Definition in *Kapitel 1* noch als Vektoren in Frage kommen.
2. Man finde noch einen weiteren Unterraum von \mathbf{R}^3 , neben den schon erwähnten \mathbf{R}^2 und \mathbf{R}^1 .
3. An einem waagrechten Balken seien beide Enden eines Seiles in einem gewissen Abstand befestigt. An dem durchhängenden Seil ist mittig eine Last von 100kg befestigt. Die beiden Seilenden bilden unter dem Einfluß der Last einen Winkel von 120° . Welche Kraft wirkt in den beiden Seilenden (Symmetrie).
4. Sei $\underline{v} = (7, -3, -5)$. Man finde 2 neue Vektoren die jeweils dreimal länger sind als \underline{v} .